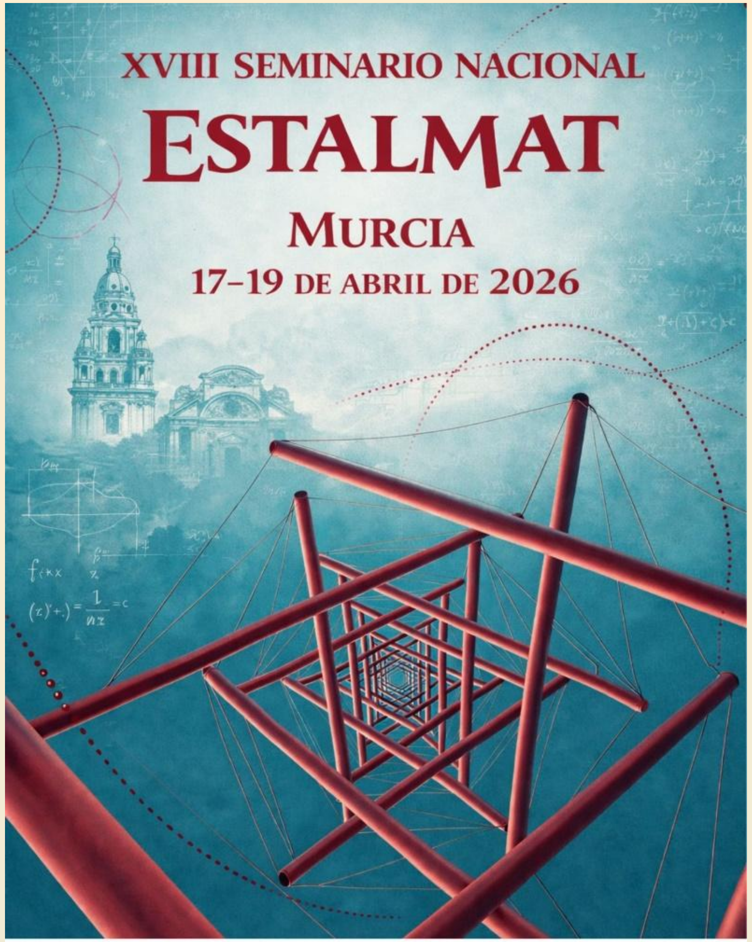


Facultad de Matemáticas
UMU

El proceso de creación y descubrimiento. Un ejemplo con progresiones aritméticas

Murcia, 18 de abril de 2026

Constantino de la Fuente Martínez

ESTALMAT
ESTÍMULO DEL TALENTO MATEMÁTICO

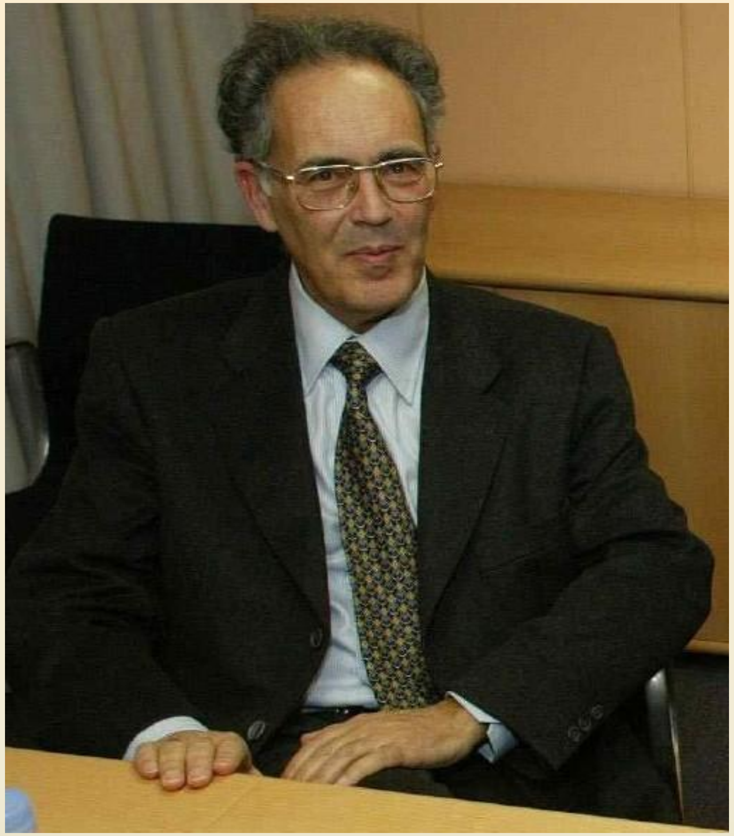
EsTalMat
CASTILLA Y LEÓN

Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán
Burgos

GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE CIENCIA, INNOVACIÓN Y UNIVERSIDADES
FECYT INNOVACIÓN

ESTALMAT Castilla y León, sede de Burgos
Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática *Miguel de Guzmán*

Abril para el recuerdo



Para mí, la corriente iniciada por Polya alrededor de la resolución de problemas representa el aspecto más universalmente válido de la matemática en la cultura humana

Burgos, 27 abril 1991

PROBLEMA

- ¿Es posible reproducir el proceso de creación y descubrimiento en matemáticas con estudiantes de Secundaria?

OBJETIVOS

- Mostrar el verdadero rostro de las matemáticas.
- Acercar a los estudiantes al proceso de creación y descubrimiento en matemáticas.
- Practicar quehaceres típicos de los matemáticos profesionales.
- Profundizar en el *enfoque heurístico de la enseñanza de las matemáticas* (M. de Guzmán).

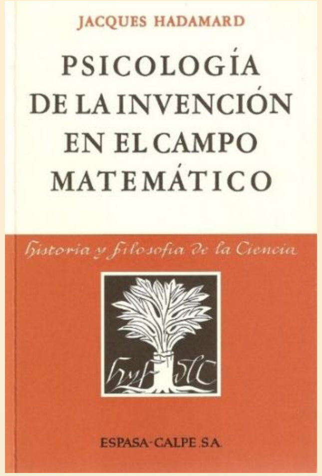
CONTEXTO

- Un ejemplo trabajado a lo largo de muchos cursos académicos.
- Alumnado de ESTALMAT “jubilados o veteranos”, de Bach. o B.I. (procedentes de ESTALMAT o no).
- Sesiones de clase con todos (ESTALMAT) y proyectos de trabajo (parejas/individuales).
- Elaboración de una memoria. Secuencia de borradores (entre 8 y 12).
- Duración de cada trabajo: entre 4 y 6 meses. Entrevistas o envíos cada dos o tres semanas.

EL PROCESO DE CREACIÓN Y DESCUBRIMIENTO

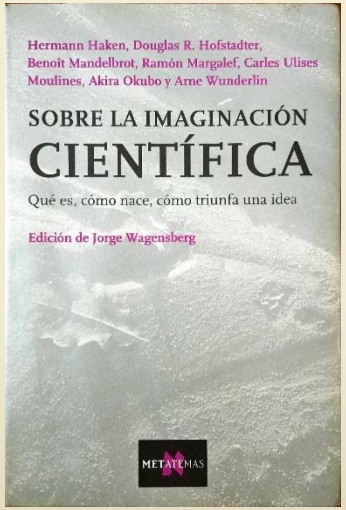
Entre el trabajo de un estudiante que trata de resolver un problema de geometría o de álgebra y un trabajo de invención, puede decirse que hay únicamente una diferencia de grado, una diferencia de nivel, tratándose en realidad de trabajos de naturaleza muy análoga.

Jacques Hadamard: *Psicología de la invención en el campo matemático, p. 175*



El aspecto más importante del descubrimiento matemático (contrariamente a la imagen habitual que se tiene de la demostración como el núcleo de las matemáticas) es la construcción de nuevos conceptos, uno detrás de otro, generalizando cada vez algún aspecto de los anteriores. Por supuesto, cada construcción tiene propiedades que no pueden ser controladas, sino tan sólo descubiertas, en este sentido las matemáticas combinan la invención y el descubrimiento.

La mayor parte de los nuevos conceptos se producen mediante ciertos tipos de recetas no escritas que todos los matemáticos entienden intuitivamente, y que normalmente se pueden caracterizar por gloriosos giros del botón; esto es, partir de un fenómeno familiar, encontrarle algún aspecto que hasta ahora había permanecido fijo (éste sería el botón) convertir explícitamente este aspecto en una variable, y ver qué sucede cuando toma valores distintos del habitual.



Douglas R. Hofstadter. Analogías con fluidos y la creatividad humana. En:
Sobre la imaginación científica. Qué es, cómo nace, cómo triunfa una idea, p.89-90.

UN EJEMPLO DE
CONSTRUCCIÓN DE UNA TEORÍA:

PROGRESIONES ARITMÉTICAS… EN EL ESPACIO

PROBLEMA INICIAL (SIGMA)

¿Será posible rellenar los espacios vacíos del cuadrado con números enteros positivos, de modo que los números de cada fila y de cada columna formen progresiones aritméticas?

	74			
				186
		103		
0				

Solución del problema

30 →	52	82	112	142	172
35 →	39	**74**	109	144	179
40 →	26	66	106	146	**186**
45 →	13	58	**103**	148	193
50 →	**0**	50	100	150	200
	↑	↑	↑	↑	↑
	13	8	3	– 2	– 7

	74			
				186
x		103		
0				

Entre x y 103 estará la semisuma de los dos: $\dfrac{x+103}{2}$

Entre $\dfrac{x+103}{2}$ y 74 estará la semisuma: $\dfrac{\dfrac{x+103}{2}+74}{2}=\dfrac{251+x}{4}$

El número situado encima de x será 2x

La diferencia de la p. a. de la 3ª fila es: $\dfrac{251+x}{4}-2x=\dfrac{251-7x}{4}$

El número que sigue a $\dfrac{251+x}{4}$ será: $\dfrac{251+x}{4}+\dfrac{251-7x}{4}=\dfrac{251-3x}{2}$

Entre $\dfrac{251-3x}{2}$ y 186 se situará la semisuma: $\dfrac{623-3x}{4}$

Por otra parte, este número también será: $\dfrac{251-3x}{2}+\dfrac{251-7x}{4}=\dfrac{753-13x}{4}$

Por tanto: $\dfrac{753-13x}{4}=\dfrac{623-3x}{4}$ Luego $130=10x;\quad 13=x$

REVISIÓN-EXTENSIÓN, VISIÓN RETROSPECTIVA, VUELTA ATRÁS

- Otras formas de resolución, casos particulares de interés, etc.
- Nuevas preguntas
- Conjeturas globales y parciales
- Variaciones en las condiciones o datos:
    - Generalizaciones
    - Particularizaciones
    - Analogías
- Intuiciones sobre regularidades, patrones, conceptos, propiedades, conjeturas, demostraciones, …

Otra forma de resolverlo:

$4x$	$y+4(x+d)$	$2y+4(x+2d)$	$3y+4(x+3d)$	$4y+4(x+4d)$
$3x$	$y+3(x+d)$ 74	$2y+3(x+2d)$	$3y+3(x+3d)$	$4y+3(x+4d)$
$2x$	$y+2(x+d)$	$2y+2(x+2d)$	$3y+2(x+3d)$	$4y+2(x+4d)$ 186
x	$x+y+d$	$x+2(y+d)$ 103	$x+3(y+d)$	$x+4(y+d)$
0	y	$2y$	$3y$	$4y$

$$\left.\begin{aligned} 103 &= x + 2(y+d) \\ 74 &= y + 3x + 3d \\ 186 &= 4y + 2x + 8d. \end{aligned}\right\}$$

Resolviéndolo resulta:

$d = 5, \ x = 13, \ y = 50.$

Surgen muchas preguntas, por ejemplo:

Si nos dan cuatro valores, ¿se puede completar la tabla de forma única?

¿Cuándo sí y cuándo no?:

Caso particular: los 4 términos están en la diagonal principal

			d
		c	
	b		
a			

$3b + d \neq a + 3c$ Sistema Incompatible

$3b + d = a + 3c$ Sistema Compatible

			4
		3	
	2		
1			

Con más de una solución

7	*6*	*5*	*4*
5	*4*	*3*	*2*
3	*2*	*1*	*0*
1	*0*	*-1*	*-2*

22	*16*	*10*	*4*
15	*9*	*3*	*-3*
8	*2*	*-4*	*-10*
1	*-5*	*-11*	*-17*

			3
		4	
	2		
1			

Sin solución

Estructura interna del problema:

- Cuadrado
- Valores numéricos dados: cuatro números enteros
- Progresiones aritméticas
- Números enteros positivos

Algunas variantes y nuevos problemas:

- Cuadrado ⇒ Rectángulo, Recta, Cubo, Paralelepípedo,...
- Valores numéricos dados ⇒ ¿Será 4 el mínimo necesario de ellos?
  Si nos dan 3, ¿qué ocurrirá?
  Si nos dan valores de las diferencias …
  Influencia de las posiciones
- Progresiones aritméticas ⇒ Geométricas, aritméticas de orden superior…
- Números enteros positivos ⇒ Números enteros, racionales, reales, ….

Todas las cuestiones hacen referencia a unos problemas más generales, por ejemplo:

¿EN QUÉ CONDICIONES SE PUEDE CONSTRUIR UNA TABLA O RED ARITMÉTICA?
¿SON UNA GENERALIZACIÓN DE LAS PROGRESIONES ARITMÁTICAS?

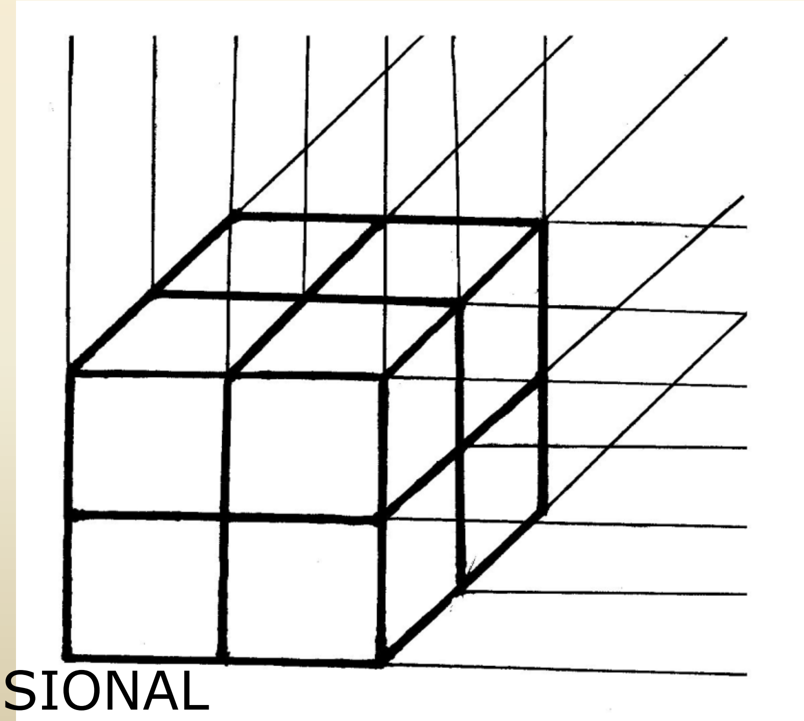
…•……………………………………………•…………

x y

P. A. TRADICIONALES

RED ARITMÉTICA BIDIMENSIONAL
(RA2D)

z	t		
x	y		



RED ARITMÉTICA TRIDIMENSIONAL
(RA3D)

- Definición
- Diferencia
- Término general
- Suma de los términos
- **Interpolación de términos**

Algunos resultados para el término general:

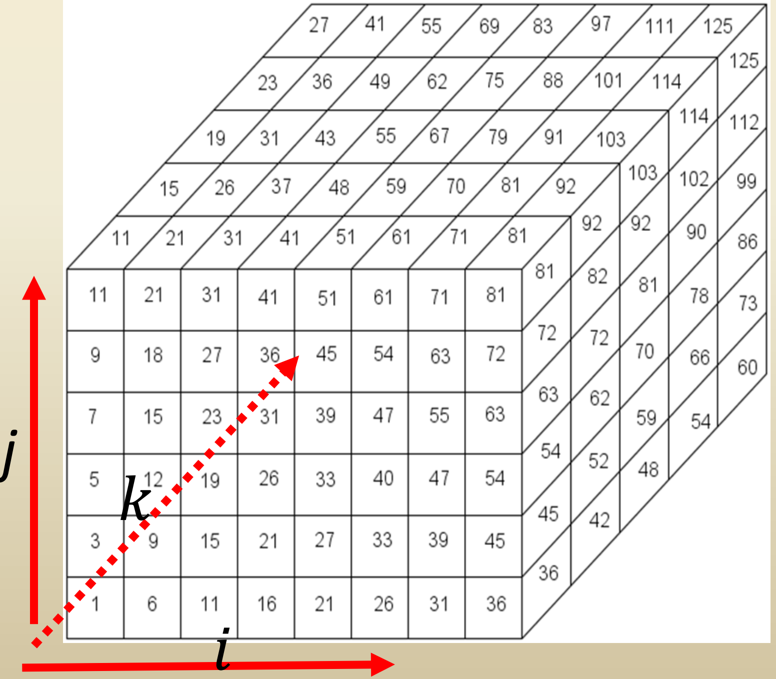
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{i,j} = a_{1,1} + (j-1)v_1 + (i-1)h_1 + d_p(i-1)(j-1)$$

Diferencia de Priscila

$$a_{i,j} - a_{i-1,j} - (a_{i,j-1} - a_{i-1,j-1})$$

$30 \rightarrow$	52	82	112	142	172
$35 \rightarrow$	39	**74**	109	144	179
$40 \rightarrow$	26	66	106	146	**186**
$45 \rightarrow$	13	58	**103**	148	193
$50 \rightarrow$	**0**	50	100	150	200
	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
	13	8	3	-2	-7



$$a_{i,j,k} = a_{1,1,1} + d_{i,1,1}(i-1) + d_{1,j,1}(j-1) + d_{1,1,k}(k-1) +$$
$$+ d_{i,j,1}(i-1)(j-1) + d_{i,1,k}(i-1)(k-1) + d_{1,j,k}(j-1)(k-1) +$$
$$+ d_p(i-1)(j-1)(k-1)$$

Problema de Olimpiada (2004)

Tenemos un conjunto de 221 números reales cuya suma es 110721. Los disponemos formando una tabla rectangular de modo que todas las columnas y la primera y última filas son progresiones aritméticas de más de un elemento. Probar que la suma de los elementos de las cuatro esquinas vale 2004.

Solución del problema

$$\begin{pmatrix} a_{1,m} & a_{2,m} & \dots & a_{n,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{n,2} \\ a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{n,1} \end{pmatrix}$$

$$S_1 = \frac{a_{1,1} + a_{1,m}}{2}.m$$

$$S_2 = \frac{a_{2,1} + a_{2,m}}{2}.m$$

....

$$S_n = \frac{a_{n,1} + a_{n,m}}{2}.m$$

$$S = S_1 + S_2 + ..S_n = \frac{m}{2}\left[\left(a_{1,1} + a_{2,1} + \dots + a_{n,1}\right) + \left(a_{1,m} + a_{2,m} + \dots + a_{n,m}\right)\right]$$

$$S = \frac{n.m}{4}\left(a_{1,1} + a_{n,1} + a_{1,m} + a_{n,m}\right) \qquad a_{1,1} + a_{n,1} + a_{1,m} + a_{n,m} = \frac{4S}{n.m} = \frac{4.110721}{221} = 2004$$

Algunos resultados para la suma de los términos

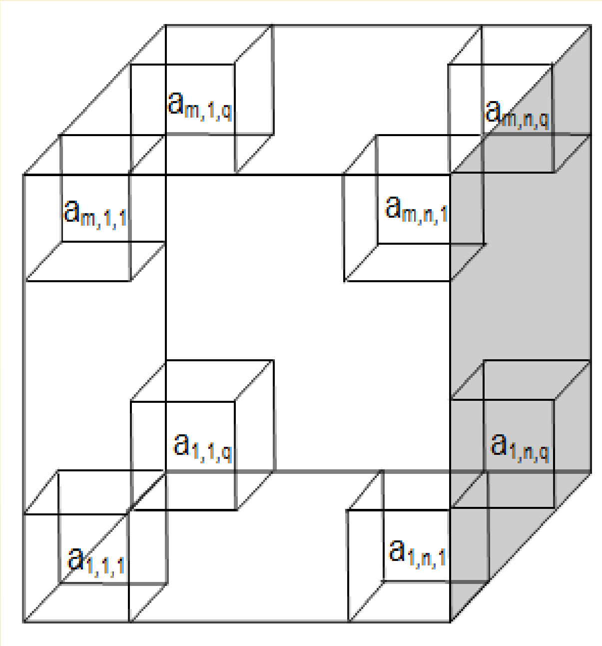
a_1	a_2	…						a_n

$$S_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right)$$

$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	…	$a_{n,m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	…	$a_{2,m}$
$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	…	$a_{1,m}$

$$S_{n,m} = \frac{n.m}{4}\left(a_{1,1} + a_{n,1} + a_{1,m} + a_{n,m}\right)$$

Si $m = 1$, resulta la de las p.a.



$$S_{n,m,p} = \frac{n.m.p}{8}\left(a_{1,1,1} + a_{n,1,1} + a_{1,m,1} + a_{1,1,p} + a_{n,m,1} + a_{n,1,p} + a_{1,m,p} + a_{n,m,p}\right)$$

$$\mathbf{S_{d_1,d_2,\ldots,d_n}} = \frac{1}{2^{\mathbf{n}}} \cdot \prod_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{d_i} \cdot \left[\sum_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{T}} \mathbf{a}_{\boldsymbol{\sigma}(1),\boldsymbol{\sigma}(2),\ldots,\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n})}\right]$$

$$P = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

$$D = \{1, d_1, d_2, \ldots, d_n\}$$

$$T = \{\sigma : P \to D \;/\; \sigma(i) \in \{1, d_i\}\}$$

OTROS RESULTADOS

$$S_n = \frac{n}{n-1}\int_0^{n-1}\left(a_1 + x.d\right)dx$$

Fórmulas de Álvaro

$$S_{n,m} = \frac{n.m}{(n-1)(m-1)}\int_0^{n-1}\left[\int_0^{m-1}\left(a_{1,1} + v_1 x + h_1 y + d_p xy\right)dy\right]dx$$

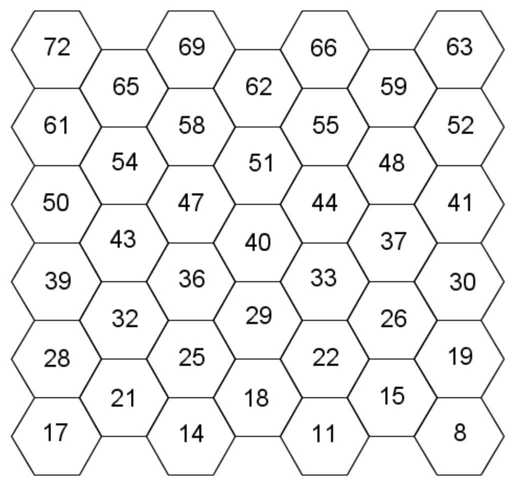
Fórmulas de Alejandra

$$\boldsymbol{S_n} = \int_0^{\boldsymbol{n}}\left(\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{d} - \frac{\boldsymbol{d}}{2}\right)\cdot\boldsymbol{dx}$$

$$\mathbf{S_n} = \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n}-(2\mathbf{i}+1)}\cdot\int_{\mathbf{i}}^{\mathbf{n-i-1}}(\mathbf{a_1} + \mathbf{x}\cdot\mathbf{d})\cdot\mathbf{dx}$$

$$\mathbf{S_{m,n}} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{m}-(2\mathbf{i}+1)}\cdot\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n}-(2\mathbf{i}+1)}\int_{\mathbf{i}}^{\mathbf{n-i-1}}\left[\int_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m-i-1}}\left(\mathbf{a_{1,1}} + \boldsymbol{h_{1,1}}\cdot(\mathbf{x}-1) + \boldsymbol{v_{1,1}}\cdot(\mathbf{y}-1) + \boldsymbol{d_p}\cdot(\mathbf{x}-1)\cdot(\mathbf{y}-1)\right)\mathbf{dy}\right]\mathbf{dx}$$

Redes de Alejandro y Borja



72		69		66		63
	65		62		59	
61		58		55		52
	54		51		48	
50		47		44		41
	43		40		37	
39		36		33		30
	32		29		26	
28		25		22		19
	21		18		15	
17		14		11		8

CONSTRUCCIÓN DE LA TEORÍA:

- DEFINICIÓN FORMAL DE RA2D, RA3D,…, RAnD
- DEFINICIÓN DE LA DIFERENCIA DE PRISCILA
- EXPRESIÓN PARA EL TÉRMINO GENERAL DE UNA RA2D, RA3D, …, RAnD
- SUMA DE LOS TÉRMINOS DE UNA RA2D, RA3D,…, RAnD
- INTERPOLACIÓN DE MEDIOS ARITMÉTICOS EN UNA RA2D, RA3D,…, RAnD
- OTROS TEOREMAS DE LA TEORÍA: RESULTADOS PARA PROGRESIONES ARITMÉTICAS DE ORDEN SUPERIOR,…

- ESTAS REDES, CON LA SUMA Y EL PRODUCTO POR UN NÚMERO REAL TIENEN ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL. DIMENSIÓN, SUBESPACIOS, …

- ¿QUÉ OCURRE PARA PROGRESIONES GEOMÉTRICAS?

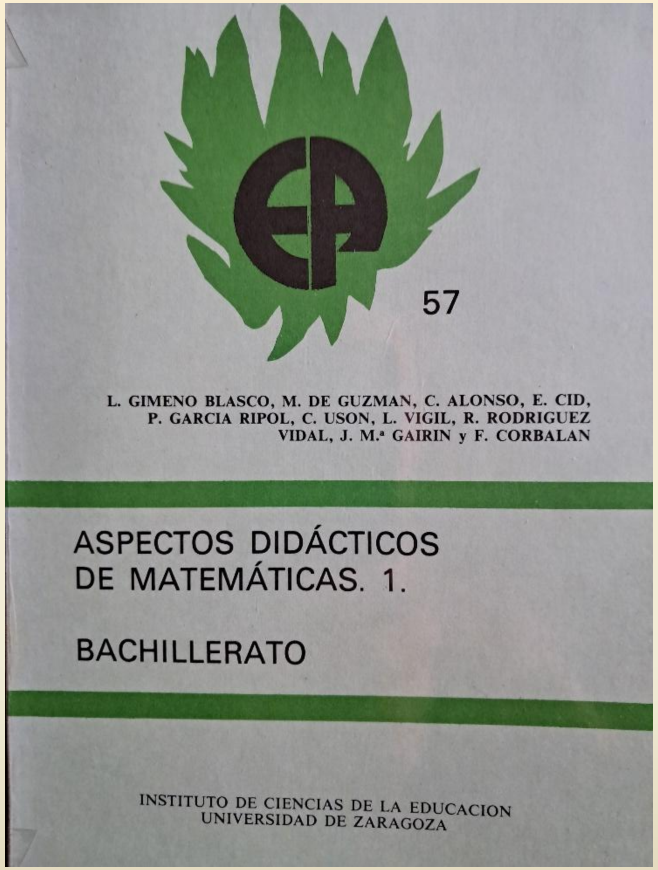
EJEMPLOS DE ALGUNA MEMORIA

INDICE **Página**

ÍNDICE

La Matemática es, en mucha mayor medida de lo que normalmente se piensa, una verdadera ciencia experimental. (...) Nunca un teorema matemático de importancia ha surgido del ejercicio de la mera abstracción y de la mera lógica. Los resultados profundos son, en general, el producto de innumerables tentativas, experimentos mentales realizados en la penumbra de intuiciones y conjeturas. ¡Cuánta tentativa inicialmente frustrada, corrección y nuevo ensayo, precede al logro de un nuevo teorema, de una nueva realidad matemática!

Miguel de Guzmán
Enfoque heurístico de la enseñanza matemática, p. 35



El resultado del trabajo creador del matemático es el razonamiento demostrativo, una prueba, pero la prueba se descubre por razonamiento plausible, es decir, por intuición.
Si esto es así, y yo lo creo, habrá un lugar para la intuición en la enseñanza de las matemáticas. La educación debe prepararnos para la invención o, al menos, para el gusto por ella. En cualquier caso, la educación no debe suprimir los gérmenes inventivos en el estudiante.

George Polya:
Matemáticas y razonamiento plausible, p. 465

MUCHAS GRACIAS

consdelafu@gmail.com